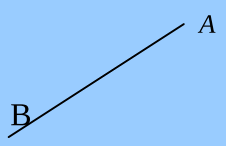
10. 3. ODLEGŁOŚĆ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYM

Wzór na długość odcinka (odległość między punktami)



$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$, gdzie $A = (x_A, y_A); B = (x_B, y_B)$

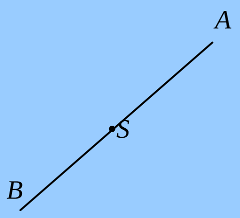
<u>Przykład 10.3.1.</u> Oblicz długość odcinka AB, gdzie $A = (3,-2); B = (-1,4)$

Rozwiązanie	Komentarz
$\lvert AB\rvert = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ $\lvert AB\rvert = \sqrt{(-1-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{16+36} =$ $= \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$	Obliczamy długość odcinka *AB* korzystając ze wzoru $\lvert AB\rvert = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Wykonujemy podstawienie $x_A = 3, y_A = -2, x_B = -1, y_B = 4$

<u>Przykład 10.3.2.</u> Dany jest punkt P=(0; 7). Wyznacz na osi OX taki punkt R, aby jego odległość od punktu P wynosiła $\sqrt{74}$.

Rozwiązanie	Komentarz
$R = (x_R, 0)$	Punkt R leży na osi OX, zatem $R = (x_R, 0)$
$\lvert PR\rvert = \sqrt{(x_R - x_P)^2 + (y_R - y_P)^2}$ $\sqrt{74} = \sqrt{(x_R - 0)^2 + (0-7)^2}$ $\sqrt{74} = \sqrt{x_R{}^2 + 49}$ $74 = x_R{}^2 + 49$ $x_R{}^2 = 74 - 49$ $x_R{}^2 = 25$ $x_R = 5$ lub $x_R = -5$	Układamy równanie z niewiadomą x_R , wykorzystując wzór $\lvert AB\rvert = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
$R = (5,0)$ lub $R = (-5,0)$	Zapisujemy współrzędne punktu R.

Środek odcinka



Współrzędne środka odcinka $S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

gdzie $A=(x_A,y_A);B=(x_B,y_B)$

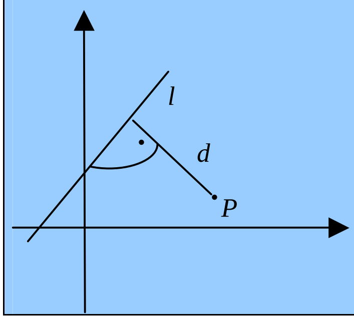
Przykład 10.3.3. Wyznacz współrzędne środka odcinka AB, gdzie $A=(3,-2);B=(-1,4)$

Rozwiązanie	Komentarz
$S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $S=\left(\frac{3-1}{2},\frac{-2+4}{2}\right)=\left(\frac{2}{2},\frac{2}{2}\right)=(1,1)$	Wyznaczamy środek odcinka AB, korzystając ze wzoru $S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right).$ Wykonujemy podstawienie $x_A=3, y_A=-2, x_B=-1, y_B=4$

Przykład 10.3.4. Dane są punkty A = (51; – 18) i B = (– 14; 24). Znajdź taki punkt C, aby punkt B był środkiem odcinka AC.

Rozwiązanie	Komentarz
$B=\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)$ $(-14,24)=\left(\frac{51+x_C}{2},\frac{-18+y_C}{2}\right)$ $-14=\frac{51+x_C}{2}/\cdot 2$ $\quad 24=\frac{-18+y_C}{2}/\cdot 2$ $-28=51+x_C$ $\quad 48=-18+y_C$ $x_C=-28-51$ $\quad y_C=48+18$ $x_C=-79$ $\quad y_C=66$	Do wyznaczenia współrzędnych punktu **C,** korzystamy ze wzoru $S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right).$ Dostosowujemy ten wzór do naszego zadania i układamy równania z niewiadomymi x_C, y_C
$C=(-79,66)$	Zapisujemy współrzędne punktu C.

Odległość punktu od prostej



Wzór na odległość punktu od prostej $d(P,l)=\dfrac{|Ax_P+By_P+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

gdzie $P=(x_P,y_P)$ i $l: Ax+By+C=0$

Przykład 10.3.5. Oblicz odległość punktu $P=(-3,2)$ od prostej $l: y=2x-4$

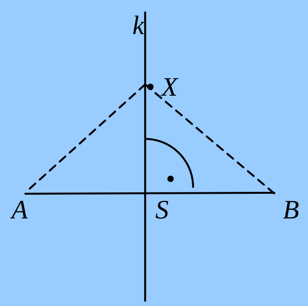
Rozwiązanie	Komentarz
$l: y=2x-4$ $-2x+y+4=0$ $A=-2, B=1, C=4$	Zamieniamy równanie kierunkowe prostej *l* na postać ogólną.
$d(P,l)=\dfrac{\lvert Ax_P+By_P+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $d(P,l)=\dfrac{\lvert -2\cdot(-3)+1\cdot 2+4\rvert}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}$ $d(P,l)=\dfrac{\lvert 6+2+4\rvert}{\sqrt{4+1}}$ $d(P,l)=\dfrac{\lvert 12\rvert}{\sqrt{5}}$ $d(P,l)=\dfrac{12}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$	Obliczamy odległość punktu *P* od prostej *l*, korzystając ze wzoru $d(P,l)=\dfrac{\lvert Ax_P+By_P+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Wykonujemy podstawienie $A=-2, B=1, C=4$ oraz $x_P=-3, y_P=2$ Usuwamy niewymierność z mianownika.

Przykład 10.3.6. Oblicz odległość między prostymi : $l: 2x-y+3=0$ i $k: 2x-y=0$

Rozwiązanie	Komentarz
	Proste : $l: 2x-y+3=0$ i $k: 2x-y=0$ są równoległe. Odległość między prostymi równoległymi jest to odległość dowolnego punktu z jednej prostej do drugiej prostej.
Niech $x_P=0$ $l: 2x-y+3=0$ $2\cdot 0-y_P+3=0$ $0-y_P+3=0$ $y_P=3$ $P=(0,3)$	Obieramy dowolny punkt *P* z prostej *l*. Pierwsza współrzędna punktu *P* jest dowolna , drugą współrzędną liczymy z równania prostej *l*.

$k: 2x - y = 0$ $A = 2, B = -1, C = 0$ $d(P,k) = \frac{\lvert 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + 0 \rvert}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$ $d(P,k) = \frac{\lvert -3 \rvert}{\sqrt{4+1}}$ $d(P,k) = \frac{3}{\sqrt{5}}$	Obliczamy odległość punktu P od prostej k, Korzystając ze wzoru $d(P,l) = \frac{\lvert Ax_P + By_P + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
$d(P,k) = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ Odp. Odległość między prostymi : $l: 2x - y + 3 = 0$ i $k: 2x - y = 0$ jest równa $\frac{3\sqrt{5}}{5}$	Usuwamy niewymierność z mianownika

Symetralna odcinka



k – symetralna odcinka AB

Symetralna odcinka – prosta prostopadła do odcinka i przechodząca przez jego środek S

Symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny, których odległości od końców tego odcinka są równe.

$$|AX| = |BX|$$

Przykład 10.3.7. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, gdzie $A=(-3,2); B=(1,-4)$

Rozwiązanie	Komentarz
$(y-y_A)(x_B-x_A)=(x-x_A)(y_B-y_A)$ $(y-2)(1+3)=(x+3)(-4-2)$ $(y-2)\cdot 4=(x+3)\cdot(-6)$ $4y-8=-6x-18$ $4y=-6x-10\ /:$ $y=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$	Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty *A* i *B*, korzystając ze wzoru $(y-y_A)(x_B-x_A)=(x-x_A)(y_B-y_A)$ Wykonujemy podstawienia $x_A=-3, y_A=2, x_B=1, y_B=-4$
$S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $S=\left(\frac{-3+1}{2},\frac{2-4}{2}\right)=\left(\frac{-2}{2},\frac{-2}{2}\right)=(-1,-1)$	Wyznaczamy środek odcinka AB, korzystając ze wzoru $S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$
$y=ax+b$ $a=\frac{2}{3}$	Wyznaczamy równanie symetralnej – prostej prostopadłej do prostej *AB*, przechodzącej przez punkt *S*. Z warunku prostopadłości prostych współczynnik kierunkowy *a* symetralnej jest odwrotny i przeciwny do współczynnika kierunkowego prostej *AB*.
$S=(-1,-1)$ $y=ax+b$ $-1=\frac{2}{3}\cdot(-1)+b$ $-1=-\frac{2}{3}+b$ $b=-\frac{1}{3}$	Obliczamy współczynnik *b* podstawiając współrzędne punktu *S* do równania $y=ax+b$
Odp. $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$	Zapisujemy równanie symetralnej.

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 10.3.1. (1pkt.).Oblicz odległość punktu $A=(-3,4)$ od początku układu współrzędnych.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie odległości punktu *A* od (0,0)	1

Ćwiczenie 10.3.2. (2pkt.) Dane są punkty A = (15; – 81) i B = (– 41; 42). Znajdź taki punkt C, aby punkt A był środkiem odcinka BC

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Zapisanie równań z niewiadomymi x_C, y_C	1
2	Podanie współrzędnych punktu *C*.	1

Ćwiczenie 10.3.3. (3pkt.) Oblicz odległość punktu $A=(-3,4)$ od osi układu współrzędnych.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie odległości punktu *A* od osi OX	1
2	Podanie odległości punktu *A* od osi OY	1

Ćwiczenie 10.3.4. (2pkt.) Oblicz odległość między prostymi $l: y=3x+4$ i $k: y=3x-2$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie współrzędnych dowolnego punktu z prostej *l*	1
2	Podanie odległości między prostymi.	1